Faszination Primzahl

Rieger, Georg Johann

Veröffentlicht in:
Jahrbuch 1997 der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.27-29

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

G. J. RIEGER, Hannover

Faszination Primzahl

Braunschweig, 11. April 1997*

Die Wahrnehmung der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ... ist wohl so alt wie die Menschheit. Da beginnt schon die Theorie; eine natürliche Zahl kann gedeutet werden als Ordinalzahl (Zählzahl) und als Kardinalzahl (Anzahl).

Beispiel: 6 Läufer (Kardinalzahl) begeben sich an den Start; im Ziel werden dann die Ordinalzahlen 1 bis 6 verteilt.

Kinder lernen üblicherweise erst Ordinalzahlen und danach die gleichlautenden Kardinalzahlen.

§ 1.

Bei den natürlichen Zahlen hat man bald die Begriffe „Teiler“ und „Primzahl“.

Beispiel: $6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3$ $(= 3 \cdot 2 = 6 \cdot 1)$ hat die Teiler 1, 2, 3, 6.

Definition: Eine natürliche Zahl heißt Primzahl, wenn sie größer ist als 1 und wenn sie außer 1 und sich selber keine weiteren Teiler hat.

Die Liste der Primzahlen bis 60 lautet

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59.$$

Für eine positive reelle Zahl x bezeichne $\pi(x)$ die Anzahl der Primzahlen bis x; es ist also $\pi(10) = 4$, $\pi(30) = 10$, $\pi(60) = 17$; schon bei **Euklid** (um 300 B.C.) wird bewiesen, daß es unendlich viele Primzahlen gibt oder

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) = \infty .$$

§ 2.

Wir machen einen großen Sprung von fast 2000 Jahren. Quadratzahlen sind sicherlich keine Primzahlen. Doch es gibt verblüffende Zusammenhänge, die wohl in der damaligen Zeit in französischen Salons diskutiert wurden. Man möchte die Primzahlen als Summe von zwei verschiedenen Quadraten schreiben. Gemäß der obigen Liste gelingt das genau bei den Primzahlen p der Gestalt $p = 1 + 4s$ wie etwa

$$5 = 1 + 4,\ 13 = 4 + 9,\ 17 = 1 + 16,\ 29 = 4 + 25,\ 37 = 1 + 36,\ 41 = 16 + 25,$$
$$53 = 4 + 49;$$

* Zusammenfassung eines Vortrags vor der Plenarversammlung der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft

erstmals bei **Girard** (um 1625 A.D.) und einige Jahre später auch bei **Fermat** findet sich die allgemeine Vermutung, daß sich jede Primzahl der erwähnten Gestalt so schreiben läßt oder

$$p = 1 + 4s \Rightarrow p = x^2 + y^2;$$

der erste Beweis dafür ließ über 100 Jahre auf sich warten und wurde von **Euler** (um 1750) ersonnen. Man hat noch ähnliche Aussagen wie

$$p = 1 + 6t \Rightarrow p = x^2 + 3\,y^2;$$

für die obige Liste bedeutet das

$$7 = 4 + 3 \cdot 1,\ 13 = 1 + 3 \cdot 4,\ 19 = 16 + 3 \cdot 1,\ 31 = 4 + 3 \cdot 9,\ 37 = 25 + 3 \cdot 4,$$
$$43 = 16 + 3 \cdot 9.$$

Das Ganze mündet ein in die Lehre von den quadratischen Formen $ax^2 + 2bxy + cy^2$ mit den Koeffizienten a, b, c und den Veränderlichen x, y; hier sind vor allen **Lagrange** und **Gauß** zu nennen.

Die Beweise verlaufen methodisch ganz innerhalb der Zahlentheorie.

§ 3.

Es ist nicht selbstverständlich, daß es unendlich viele Primzahlen der erwähnten Gestalten 1 + 4s und 1 + 6t gibt. Glücklicherweise läßt sich der Beweisgedanke bei **Euklid** entsprechend anpassen. Die umfassende Antwort auf Fragen dieser Art hat **Dirichlet** (um 1835) gegeben, wonach jede prime Restklasse unendlich viele Primzahlen enthält. So gibt es beispielsweise unendlich viele Primzahlen der Gestalten

$$1 + 10v = 11, 31, 41, 61, 71, \ldots \qquad 3 + 10v = 3, 13, 23, 43, 53, 73, 83, \ldots$$
$$7 + 10v = 7, 17, 37, 47, 67, 97, \ldots \qquad 9 + 10v = 19, 29, 59, 79, 89, \ldots;$$

bis auf die Teiler 2 und 5 von 10 wurden hier alle Primzahlen bis 100 sichtbar gemacht. Zum Beweis hat Dirichlet seine Restklassencharaktere eingeführt, auf deren Behandlung verzichtet wird; wir merken nur an, daß sie am Beginn der Lehre von den Gruppen und ihren Darstellungen stehen; in Weiterführung ist diese Lehre für die Theoretische Physik und insbesondere für die Quantentheorie von Bedeutung, wie **H. Weyl** (1928) und **E. P. Wigner** (1931) in Büchern dargelegt haben.

§4.

Wie oben festgestellt wurde, gibt es zwischen 0 und 30 genau 10 und zwischen 30 und 60 nur noch 7 Primzahlen. Dem liegt die allgemeine Beobachtung zugrunde, daß die Primzahlen immer seltener werden; das drückt sich quantitativ aus in der Vermutung („Primzahlsatz")

$$\pi(x) \approx \frac{x}{\log x} \quad \text{oder genauer} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = 1$$

von **Legendre** (kurz vor 1800) und etwas schärfer bei Gauß.

In abgeschwächter Form wurde eine solche Aussage von **Tschebyscheff** (1850) bewiesen.

Nach wichtigen Vorarbeiten durch **Riemann** (1859) ließ der Beweis des Primzahlsatzes doch 100 Jahre auf sich warten; unabhängig voneinander waren 1895 fast gleichzeitig **Hadamard** und **de la Vallée Poussin** erfolgreich. Die Methoden reichen weit über die Zahlentheorie hinaus und verwenden Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Insbesondere geht es um die sogenannte Riemannsche Zetafunktion

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s};$$

für reelle $s > 1$ kommt sie schon bei Euler vor; von ihm stammt ja eine der schönsten Formeln der Analysis, nämlich

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}64493 \ldots$$

(wobei $\pi = 3{,}14159 \ldots$ die Kreiszahl ist und nichts mit der Funktion $\pi(x)$ zu tun hat). Riemann dagegen deutet s als komplexe Zahl.

§ 5.

Ein Ansatz von **Eratosthenes** (um 200 B.C.) führte erst um 1920 durch **V. Brun** zu brauchbaren Ergebnissen. Man spricht von einem Sieb; es geht dabei um kunstvolle kombinatorische Überlegungen. Wenn es überhaupt unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, so sind sie demzufolge wesentlich seltener als die Primzahlen. Etwa um dieselbe Zeit hat sich **H. Bohr** eingehend mit der Zetafunktion befaßt und seine Theorie der fastperiodischen Funktionen entwickelt. Nach **Vinogradov** (1937) ist jede große ungerade Zahl die Summe von drei Primzahlen. Wir erwähnen noch das Große Sieb von **Linnik** (1941). Weiter in die Gegenwart gehen wir nicht.

§ 6.

Man könnte noch viele offene Fragen formulieren. Oben klang schon an: Gibt es unendlich viele Primzahlzwillinge? Schärfer als Vinogradov hat **Goldbach** (um 1750) vermutet, daß jede große gerade Zahl die Summe von zwei Primzahlen ist. Dann ist da noch die Riemannsche Vermutung. Das mag genügen.

Motto 1	Motto 2
Gott als das Vonwoher der Fraglichkeit.	Gott als das Nachwohin der Antwortigung.
W. Weischedel in:	
Der Gott der Philosophen, 1979	Hannover, im September 1997

Prof. Dr. rer. nat. Georg Johann Rieger
Rosenstraße 2 · 31311 Uetze